VI Congreso Virtual Iberoamericano de Calidad en Educación Virtual y a Distancia
EduQ@2015
15 al 30 de septiembre de 2015

UN PROBLEMA DE MOVIMIENTO PARABÓLICO EN CÁLCULO CON USO DE GEOGEBRA

EJE TEMÁTICO 1: Experiencias y recursos en educación virtual 2.0. Los cursos MOOC abiertos masivos en línea: Comunicación de experiencias, evaluación e impacto de esta nueva tendencia.

Mario Garelik, Fabiana Montenegro.
Área de Matemática, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral
Ciudad Universitaria, Paraje El Pozo. Santa Fe. Santa Fe. Argentina
mgarelik@gmail.com, montenegrofabiana@yahoo.com.ar

Resumen. El presente trabajo aborda el tratamiento de una propuesta didáctica de incorporación de un sistema algebraico por computadora como herramienta para la enseñanza de un problema de Cálculo en alumnos del primer año de dos instituciones de nivel universitario y terciario, en carreras de ingeniería y profesorado de matemáticas, respectivamente.

Trata, a través de la incorporación de una actividad en el aula, sobre el diseño de una contrastación entre dos formas de enseñanza del tema, la tradicional y una alternativa, que refiere al uso de un software como instrumento.

La puesta en práctica de la experiencia, que se prevé para el segundo semestre del año en el cual se desarrollan las asignaturas pertinentes al tema, viabilizará la obtención de posibles indicadores de valía para los procesos de enseñanza y aprendizaje en el tema

Palabras Clave.

Sistemas Algebraicos por Computadora, Aprendizaje, Registros de Representación.

1 Introducción

En matemática, el concepto de derivada se manifiesta con total protagonismo en casi todas sus ramas. En particular, una aplicación directa del mismo está dada en problemas vinculados con velocidad y aceleración instantánea. En la mayoría de los currículos de las carreras de ingeniería se presentan, comúnmente, problemas y situaciones que se apoyan en esta temática.

En práctica áulica cotidiana, resultan comunes los problemas que se detectan para la comprensión del concepto. El carácter de instantáneo que se le asignan a las nociones de velocidad y aceleración no resulta cabalmente asimilado por los alumnos, cuestión que se materializa tanto en las distintas instancias de evaluación como en preguntas informales durante las clases de teoría y de práctica.

Una extensa literatura en el ámbito internacional da cuenta hoy de la decidida e inevitable participación e incidencia de las Nuevas Tecnologías para la Información y la Comunicación (NTICs) en general y los sistemas algebraicos por computadora (CAS) en particular en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Estas NTICs resultan un elemento esencial en los nuevos contextos y espacios de interacción entre los individuos. Estos nuevos escenarios sociales conllevan rasgos diversos que generan la necesidad del análisis y reflexión en torno a sus características.

Así, los espacios educativos también se encuentran en constante transformación, y requieren de una reflexión crítica acerca del uso e incorporación de las tecnologías, apostando por una integración y aprovechamiento de las mismas que resulten productivos en términos del alcance de aprendizajes satisfactorios.

Existe consenso en considerar a las nuevas tecnologías como medio y recurso didáctico, y no como la panacea que resolverá las problemáticas dentro del ámbito educativo. Por tanto, corresponde no sobredimensionarlas y, en cambio, establecer orientaciones para su uso, logrando así soluciones pedagógicas y no sólo tecnológicas.

En estos nuevos escenarios educativos, todos los actores involucrados requieren de formación y perfeccionamiento para situar a las tecnologías como un medio didáctico, generando nuevas metodologías y dinámicas de motivación para la compleja tarea de aprender.

La investigación didáctico-educativa en este ámbito es una de las herramientas que posibilitará el análisis, reflexión y estudio del binomio tecnología y educación.

Esta investigación se circunscribe a los alumnos del primer año de la asignatura Cálculo I de las distintas carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral y los alumnos de Cálculo en

una variable del Profesorado de Matemática para la Educación Secundaria del Instituto de Formación Docente N° 32, ambas instituciones de la ciudad de Santa Fe.
El presente artículo da inicio, en su sección 2, con el planteo del problema de investigación, una breve descripción de la situación contextual y algunas consideraciones que refieren a la incorporación de un CAS para la enseñanza de un tema de Cálculo, lo que constituye el tema central de la investigación. En la siguiente sección se da cuenta de los objetivos propuestos, que servirán de guía para el estudio.
La sección 4 plantea un marco teórico de referencia, centrado en dos cuestiones fundamentales: la incorporación de las NTICs en los procesos de enseñanza y aprendizaje y los registros de representación semiótica, como estimulantes para el desarrollo de una enseñanza que propicie el logro de aprendizajes satisfactorios.
El artículo continúa con un detalle de los aspectos metodológicos que hacen al diseño de la propuesta, detallando los puntos inherentes a la implementación (infraestructura, recursos humanos, presupuestos horarios, equipamiento, etc) de la experiencia.
Por último, y teniendo en cuenta el carácter de propuesta del estudio, se enumeran algunas reflexiones y conjeturas que, a manera de guía, se plantean para la investigación en un futuro, esto es, para cuando en el segundo semestre del año la experiencia inicie su etapa de desarrollo, su puesta en marcha durante el cursado de la asignatura.

2 Planteo del problema

La crítica situación que hoy atraviesa la educación en todos sus niveles, en particular, en los primeros años del ciclo básico de nuestras universidades, que se ven signados por los problemas del desgranamiento de matrícula, abandono, rezago o repitencia de los alumnos ingresantes, indica que el contexto en el inicio de la educación universitaria no sea el adecuado ni el esperable.
No debería, entonces, descartarse la posibilidad de que la situación descripta, esté asociada a las dificultades que el estudiante encuentra en esas asignaturas iniciales.
Si bien el origen de tal escenario se sitúa, sin dudas, en aspectos sociales, educativos, políticos y económicos de los más diversos, se advierte que las competencias cognitivas, particularmente en matemática, con las que el alumno inicia su vida universitaria distan de resultar suficientes.
Probablemente no desvinculado con lo anterior, los alumnos manifiestan problemas en la construcción de significados de conceptos clave que subyacen en los temas de las asignaturas de matemática de primer año.
En pos de dar cuenta de esta problemática, desde la práctica docente se realizan reiterados esfuerzos por revertir la situación.
Entre los conceptos problemáticos y, al mismo tiempo, novedosos para la mayoría de los ingresantes, se encuentra el de derivada. Por un lado la enseñanza muchas veces se centra en su interpretación geométrica y el manejo algorítmico de reglas de derivación sin otorgar importancia al registro algebraico, esto es, como razón de cambio instantánea de una función. Y por otro, debido a múltiples causas, no es

frecuente la vinculación de conceptos matemáticos con contenidos curriculares de otras disciplinas, como la Física.
Este trabajo se enfoca, precisamente, en una propuesta dirigida a enfrentar esta situación, procurando mediar en el proceso de enseñanza de un tema de Cálculo con la ayuda de un CAS, el Geogebra, intentando explotar al máximo sus potencialidades para visualizar y dinamizar el proceso de enseñanza y buscando propiciar que los alumnos logren así alcanzar aprendizajes satisfactorios.

3 Objetivos
Los objetivos se plantean de acuerdo con dos tópicos de interés:

La problemática alrededor de la interpretación de la derivada
Que el alumno:
- Comprenda la interpretación física de la derivada y su relación con la ya conocida interpretación geométrica de la misma.
- Logre identificar la forma de la gráfica de la función posición que modela un problema y algunas de sus características esenciales atinentes al modelo: inyectividad, extremos, intersección con ejes.
- Pueda formular conjeturas acerca de lo que más adelante estudiará como el criterio de la primera derivada para la monotonicidad de funciones.
- Logre establecer, a través del registro visual, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y las de sus sucesivas derivadas.

El empleo del software
- Evaluar las eventuales diferencias en el costo operacional entre la modalidad de trabajo en la cual las actividades se llevarán adelante según las prácticas habituales y aquélla en la que las actividades se desarrollarán con el apoyo del software Geogebra, en términos de las posibilidades que el mencionado programa brinda.
- Aprovechar, en particular, la ventaja de visualizar en simultáneo, las gráficas de una función y las de sus derivadas primera y segunda de una manera dinámica, esto es, que a modificaciones en una de ellas, los cambios en las otras dos se evidencian de manera automática.
- Aprovechar la posibilidad de visualizar un tercer registro de representación, el tabular, alternativo a los dos comúnmente empleados: algebraico y gráfico.
- Mostrar las ocasionales limitaciones que se presentan al trabajar con el Geogebra con saltos racionales discretos en eventuales trayectorias continuas con extremos en puntos irracionales del dominio.

4 Marco teórico
Se presentan a continuación los lineamientos teóricos sobre los cuales se asienta esta investigación.
En primer término se hace mención a los aspectos esenciales, en virtud de su relación con este trabajo, de la teoría de Duval acerca de los registros de

representación semiótica y la importancia que el autor le asigna a los mismos en el proceso de aprendizaje.
Seguidamente, se expone un breve detalle relacionado con la importancia de actividades como la exploración y la formulación de conjeturas, así como la incidencia del dinamismo de los procesos de visualización de distintos sistemas algebraicos computacionales (CAS), en particular el Geogebra, como posibles propiciantes de aprendizajes satisfactorios para los estudiantes.
Las representaciones mentales o representaciones internas, han sido estudiadas desde la psicología cognitiva por numerosos autores. Font, Godino y D`Amore [1] realizan un detallado estudio sobre la importancia y complejidad de las representaciones en el que incluyen el análisis de la distinción entre representaciones internas y externas.
Refiriéndose a las externas, el psicólogo francés Raymond Duval desarrolló una teoría cognitiva de las representaciones semióticas a las que define como un conjunto de signos que constituyen el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles a otros individuos. Identifica una actividad ligada a la producción de representaciones y otra ligada a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos representados. Llama semiosis al primer tipo de actividad y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto. [2].
En referencia a la primera de las nociones, postula que "las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias restricciones de significado y de funcionamiento". [3]
Distingue registros de representación lingüísticos, entre los cuales se cuentan el lenguaje natural, la escritura algebraica, el lenguaje formal y otros registros, como las figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, etc.
La importancia del uso de los registros semióticos de representación en matemática radica en que los objetos matemáticos no son alcanzables sino por medio de sus representaciones, en virtud de su carácter abstracto que los diferencia de los objetos palpables del mundo físico. [4], [5]. Es en estos términos que se plantea la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Resulta fundamental no confundir el objeto en estudio con su representación. [3], [4].
Para que un sistema semiótico pueda concebirse como un registro de representación debe satisfacer, sostiene Duval, las condiciones que se detallan:

- Formación de una representación, identificable como una representación de un registro dado.
- Tratamiento de una representación, que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ésta ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.

- Conversión de una representación, que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. [3].

Respecto de la última acción, el mismo autor destaca que el cambio y la coordinación de los registros resultan fundamentales para una aprehensión conceptual de los objetos (matemáticos) y concluye que en una fase de aprendizaje, la conversión juega un papel esencial en la conceptualización. Sin embargo, propone prestar especial atención a la identificación de posibles situaciones de congruencia o incongruencia, fruto de la consistencia o no en el esquema cognitivo al momento de un cambio de registro semiótico. En tal sentido, afirma la estabilidad del conocimiento de un concepto en tanto quede al margen de contradicciones luego de atravesar los distintos registros de representación. Sostiene, en este sentido que debe promoverse y considerarse como indispensable la tarea de conversión para completar una correcta formación del concepto. [3].

Diferentes investigaciones sustentan la influencia de las representaciones semióticas en el aprendizaje de matemáticas: Hiebert y Carpenter [6], Janvier [7], Kaput [8], entre otros.

Sobre los instrumentos que propician aprendizajes basados en la diversidad de representaciones, no pueden dejar de mencionarse los que brindan las NTICs, de indisimulable incidencia en la educación.

La disponibilidad de netbooks en la mayoría de las escuelas públicas secundarias de nuestro país a partir del plan Conectar Igualdad y el acceso a software libre, brinda a los docentes de este nivel y del nivel superior la posibilidad de incorporar recursos alternativos para la enseñanza, en particular, los vinculados con las tecnologías de la información y la comunicación.

De manera específica, GeoGebra es un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo, con una triple percepción de los objetos: algebraica, gráfica y numérica, lo que permite apreciar los objetos matemáticos en tres registros diferentes de representación. Cada representación se vincula dinámicamente con las demás en una adaptación automática que asimila los cambios producidos en cualquiera de ellas, independientemente de cuál sea la creada como punto de partida. Por otra parte, una de las características de esta herramienta es que en su "… manipulación intervienen acciones que no provienen de los sujetos, sino de la programación de la que son producto. Es decir que en dichos objetos computarizados se encuentra encapsulada una praxeología matemática, producto de la transposición informática de una organización matemática determinada" [9].

Distintas investigaciones como Arcavi y Hadas [10], Artigue [11], Santos [12], Santo Trigo [13], Villareal [14], estudian los aportes de las herramientas computaciones vinculadas con el aprendizaje de la matemática.

En ellas, en general, subyace la idea de que el uso de software posibilita otros modos de hacer en la clase de Matemática, en el que los estudiantes pueden

focalizar su atención en procesos de análisis de regularidades, visualizaciones, conjeturas, modelizaciones, toma de decisiones, razonamiento y resolución de problemas.
En este sentido, Arcavi y Hadas sostienen que "…los ambientes dinámicos no sólo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permite transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones." [13].
En la misma línea, Santos [12] menciona que durante la exploración de problemas matemáticos es cuando salen a flote las conjeturas de los estudiantes, lo cual provoca que éstos utilicen diversas estrategias que les permiten justificar dichas conjeturas.
Se propone entonces, en términos de lo expuesto antes, la implementación del software Geogebra como instrumento didáctico mediador del proceso de enseñanza, procurando explotar al máximo sus potencialidades (como la posibilidad de alternar entre distintos registros de representación, velocidad en cálculos, crear animaciones que permiten ver movimientos, etc.) en pos de, por una parte, evitar dispersiones de atención innecesarias en operatorias secundarias que puedan apartarlos del foco de análisis del eventual tema en cuestión y, por otra, visualizar y dinamizar el proceso de enseñanza, propiciando que los alumnos logren así el desarrollo de competencias propias del trabajo matemático, como la exploración, la elaboración de conjeturas, la validación de los procedimientos desarrollados, poniendo en juego los conceptos conocidos así como los que se intentan desarrollar para alcanzar aprendizajes satisfactorios.
Asimismo, y en relación con lo anterior, se espera que la utilización del mencionado CAS permita que el proceso de enseñanza del concepto de derivada pueda direccionarse hacia las aplicaciones físicas de la derivada y sus relaciones con situaciones de la vida real.

5 Lineamientos metodológicos

En el presente trabajo se exponen algunas líneas metodológicas acerca del diseño de una propuesta que apunta a la enseñanza alrededor de un tema específico de Cálculo, en dos formatos diferentes: uno convencional y otro mediante el uso de un CAS.
La experiencia se llevará a cabo con la totalidad de los alumnos cursantes de la asignatura Cálculo 1 del 1º año de las carreras de ingeniería que se dictan en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (F.I.C.H.) de la Universidad Nacional del Litoral y los alumnos de Cálculo en una Variable del Profesorado de Matemática para la Educación Secundaria del Instituto de Formación Docente N° 32, ambas instituciones de la ciudad de Santa Fe.
En los planes de estudio de las carreras antes mencionadas de la F.I.C.H., la asignatura Cálculo I se dicta en el segundo semestre de cada año. Su presupuesto

horario es de 75 horas cuatrimestrales, traducidas en cinco horas de dictado semanal, dos de ellas para teoría y tres para práctica.

Por su parte, en el Instituto de Formación Docente N° 32, la asignatura Cálculo en una Variable corresponde al segundo año de la carrera. Si bien es de carácter anual, el tema objeto del presente trabajo corresponde al segundo cuatrimestre. Su presupuesto horario semanal consiste en seis horas cátedra, de carácter teórico-práctico.

Para la implementación de esta propuesta se organizará una clase extraordinaria el primer sábado del segundo cuatrimestre del 2015, al finalizar el dictado de clases correspondientes a la primera semana.

Se solicitará la colaboración de los tres auxiliares de docencia de la asignatura Cálculo I.

Así, los alumnos de ambas instituciones, participarán, en primera instancia, de una clase en la que se recordarán cuestiones teóricas vinculadas con las derivadas primera y segunda de una función y la directa relación que las mismas tienen con el concepto de velocidad y aceleración instantáneas. Finalizada la misma, el conjunto de alumnos se dividirá de manera aleatoria de modo que una mitad se constituya desde ese momento como grupo control (GC) y la otra mitad como grupo experimental (GE), siendo este último conducido al laboratorio de informática.

Como aplicación, en ambos grupos, se tratarán dos problemas: uno referido a un clavadista y otro a una piedra que explota, correspondientes al tema movimiento parabólico. Ambos problemas fueron extraídos de libros universitarios de Cálculo y se modificaron las consignas a trabajar atendiendo a los objetivos ya mencionados.

El problema del clavadista, se extrajo del texto Cálculo Esencial [15] (cfr. Apéndice). En tanto, el problema de la piedra que explota fue extraído del texto Cálculo una variable [16] (cfr. Apéndice).

Divididos los grupos se procederá, en uno y otro, a la resolución del Problema del Clavadista.

En el GC, el tratamiento para el modelado y resolución del problema del clavadista se realizará con los matices típicos de una enseñanza convencional, con lápiz y papel, apoyada en lineamientos constructivistas que promuevan así la participación y discusión de los eventuales tópicos que pudieran resultar de interés.

Se tratará así en el pizarrón, de manera conjunta entre alumnos y docente, el modelo que representa al problema, identificando inicialmente variables y reconociendo el significado de los parámetros involucrados en el modelo, para luego dar paso al trazado de estrategias posibles de resolución, estimulando todo tipo de aportes y debates que pudieran resultar de valía para el tema.

Paralelamente, en el GE, esta etapa se iniciará mostrando a los alumnos a través de una pantalla, las principales herramientas y comandos del GeoGebra que se usarán en esta actividad y entregándoles un breve instructivo referido a ellas.

Respecto de lo anterior, debe notarse que previamente a la clase en cuestión se solicitará a todos los alumnos que lleven, en caso de contar con ellas, netbooks o notebooks. Asimismo, se les solicitará, con la debida antelación que, por un lado, se hagan del software GeoGebra, libre y gratuito, disponible en la página http://www.geogebra.org/ y, por otro, del archivo de extensión .ggb, de elaboración propia, referido al problema del clavadista, que se encontrará disponible en el aula virtual que cada una de las asignaturas mencionadas dispone.

Todo lo anterior se prevé como complementario a los equipos ya disponibles en el mencionado laboratorio de informática de la FICH, en los cuales los docentes involucrados en la experiencia nos ocuparemos de dotar del mencionado CAS y el archivo correspondiente.

Posteriormente, siempre en el GE, se entregarán las consignas referidas al problema del clavadista, solicitando a los alumnos que empleen el archivo ggb para dar respuesta a las mismas.

Si se tiene en cuenta el hecho de que, por un lado, como se expresó en párrafos anteriores, se destinará un tiempo breve inicial para el aprendizaje por parte de los alumnos de las herramientas básicas del Geogebra (interacción entre las distintas ventanas existentes, modo de introducir funciones, uso de deslizadores, etc) y, por otro, la familiaridad de los jóvenes con las TICS conjuntamente con la sencillez en su accesibilidad por parte del GeoGebra (pues no requiere programación) se espera que los alumnos de este grupo puedan emplear con éxito el archivo construido para dar respuesta a las consignas planteadas.

El mismo contiene las gráficas de la función posición, velocidad y aceleración (que se irán haciendo visibles toda vez que el estudiante lo requiera) y un deslizador que, activado automáticamente cuando le sea necesario, visualizará las distintas posiciones de una recta que interseca a la función posición y que tendrá por objeto representar la altura que el clavadista tiene en determinados momentos de su trayectoria, situación de análisis requerida en una de las consignas. Además este archivo posibilitará la determinación inmediata y sin la necesidad de efectuar cálculos aritméticos del dominio y conjunto imagen de las distintas funciones involucradas, de las coordenadas del vértice, del cero de la función posición y de la función velocidad, etc., como así también interpretar geométricamente la relación entre una función y sus derivadas primera y segunda.

Concluido el tratamiento de la actividad del clavadista, se les propondrán, a ambos grupos, las consignas referidas al problema de la piedra que explota para que, por un lado con las herramientas teóricas vistas y, por otro, con la para entonces reciente resolución del problema anterior como guía (en ambas modalidades), aborden el modelado y solución de la tarea sugerida.

Se les brindará un tiempo apropiado (unos 30 minutos aproximadamente) para completar las actividades asignadas.

Posteriormente, se procederá a la recolección de las producciones escritas, para el futuro tratamiento y análisis, que formarán parte de una próxima investigación.

A continuación se transcribe una tabla con el enunciado de ambos problemas: el que se desarrollará en la clase (clavadista) y el que se propondrá para que resuelvan solos (piedra).

La transcripción de las consignas en paralelo se fundamenta en, por un lado, evidenciar que son similares los conocimientos y/o procedimientos que se ponen en juego y, por otro, mostrar el isomorfismo de las consignas en uno y otro problema.

Tabla 1. Los dos problemas tratados.

<table>
<tr><th>Consigna</th><th>El problema del clavadista</th><th>El problema de la piedra</th></tr>
<tr><td>Enunciado</td><td>Un clavadista salta desde un trampolín que se encuentra a una altura de 32 pies sobre el agua con una velocidad inicial de 16 pies/seg. Determina la función que modeliza la posición de clavadista (en metros) en términos del tiempo transcurrrido (en segundos)</td><td>Una explosión de dinamita lanza desde el suelo una roca pesada directamente hacia arriba con una velocidad de 160 pies/seg. Luego de t segundos, la roca alcanza una altura de $s(t)=160\,t-16\,t^2$. (La trayectoria descripta por la piedra se considera incluida en un plano)</td></tr>
<tr><td>Consigna 1</td><td>a) Graficar la trayectoria recorrida por el clavadista en un sistema de ejes coordenados cartesianos
b) ¿Cuál es el dominio y el conjunto imagen de la trayectoria vista como función? ¿Qué interpretación tienen estos conjuntos en el contexto del problema?</td><td>a) ¿Es función la relación que vincula la altura de la roca a medida que transcurre el tiempo? ¿Por qué?
b) Si es función:
b.1) Cuáles son las variables que intervienen? ¿En qué unidades están expresadas dichas variables?
b.2) Graficar la función en un sistema de ejes coordenados cartesianos.
b.3) ¿Cuál es el dominio y el conjunto imagen? ¿Qué interpretación tienen estos conjuntos en el contexto del problema?</td></tr>
<tr><td>Consigna 2</td><td>¿El clavadista comienza su descenso ni bien salta o transcurre algún tiempo? En este último caso, ¿cuánto tiempo transcurre hasta que se inicia el descenso?</td><td>Describir coloquialmente el movimiento de la roca.</td></tr>
<tr><td>Consigna 3</td><td>¿Cuánto tarda el clavadista en chocar con el agua?</td><td>¿Cuánto tarda la roca en llegar al suelo nuevamente?</td></tr>
<tr><td>Consigna 4</td><td>a) ¿En qué instante de su trayectoria está a una altura de 32 pies?
b) ¿Hay otros instantes en los que se alcanza la misma posición? ¿Cuáles son? Mencionar un ejemplo de dos instantes donde la altura sea la misma.</td><td>a) ¿En qué instante de la trayectoria se encuentra a una altura de 200 pies?
b) Mencionar un ejemplo de dos instantes donde la altura de la roca sea la misma.</td></tr>
<tr><td>Consigna 5</td><td>¿En qué instante de su trayectoria está a una altura de 40 pies?</td><td>¿En qué instante de su trayectoria está a una altura de 450 pies?</td></tr>
<tr><td>Consigna 6</td><td>¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura máxima que logra?</td><td>¿Cuál es la altura máxima que logra la roca y en que instante la alcanza?</td></tr>
<tr><td>Consigna 7</td><td>a) ¿Qué signo tiene la función velocidad en el intervalo de tiempo [0, 1/2]? ¿Y en el intervalo [1/2, 2]?
b) ¿Podría explicar estos hecho matemáticamente, a partir de las herramientas de Cálculo aprendidas?</td><td>a) Obtener la ecuación y la gráfica de la función velocidad.
b) ¿La función velocidad es positiva en todo el dominio de la función posición? ¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>Consigna</td><td>El problema del clavadista</td><td>El problema de la piedra</td></tr>
<tr><td>Consigna 8</td><td>a) La interpretación de que la aceleración sea constante en el problema se infiere completando la tabla<table><tr><td>t</td><td>s(t)</td><td>v(t)</td><td>a(t)</td></tr><tr><td>0</td><td>32</td><td>16</td><td>-32</td></tr></table></td><td>a) Obtener la ecuación y la gráfica de la función aceleración.
b) ¿Qué significado tiene en términos del problema que la aceleración sea constante? (sin tabla)</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td><table><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>
b) Interpretar los valores obtenidos en el 2° renglón de la tabla, contextualizados al problema.</td>
<td>b) ¿Cuál es el valor de la posición, de la velocidad y de la aceleración en t=3? Interpretar estos valores en términos del problema.</td>
</tr>
</table>

6 Algunas reflexiones y conjeturas

A partir de las actividades propuestas, y con vistas a la futura implementación de las mismas, se enumeran algunas conjeturas y reflexiones acerca de lo que se espera obtener, siempre en términos de los objetivos planteados.

Para ello es propio considerar que una conjetura consiste, tal como sostiene Molina Gonzaléz, en "… una inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes, la cual es revisada o elaborada a lo largo del proceso de investigación." [17].

En estos términos, el planteo de conjeturas no supone hipótesis iniciales a ser probadas, sí objetivos y preguntas de investigación a las que se pretende dar respuesta. Fundada por lo general en la insatisfacción del investigador con los resultados observados en sus prácticas, procura un criticismo constante en la búsqueda de mejorar especulaciones iniciales, que ayuden al investigador a percibir nuevos sucesos o relaciones y hacerle cambiar, eventualmente, su perspectiva inicial [17].

En tal sentido, referido al tema objeto del presente estudio, caben ciertas reflexiones según los siguientes planos de análisis:

Es probable que los alumnos evidencien alguna dificultad en el aprendizaje del carácter instantáneo del concepto de velocidad. Sin embargo, probablemente por haber sido un tema visto bien en materia antecorrelativa (alumnos de FICH) bien con anterioridad en el currículo de la asignatura (alumnos del Instituto del Profesorado), se especula que no tendrán problemas con lo referente a la interpretación geométrica de la derivada.

Sumado a lo anterior, se prevé la presentación de las frecuentes dificultades operacionales que, referidas a lo aritmético y algebraico, puedan evidenciarse en el GC.

Vinculado a lo anterior, se espera que el software Geogebra estimule el tránsito entre los distintos registros de representación, cuestión fundamental para el logro de aprendizajes satisfactorios desde la teoría de Duval.

Se infiere que la utilización del mencionado CAS contribuirá así, a partir de las posibilidades que ofrece, a aumentar la capacidad para establecer e interpretar, a través del registro visual, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y las de sus sucesivas derivadas, iniciándose, de ese modo, en lo que más tarde estudiará como los criterios de la primera y segunda derivada para la gráfica de una función.

El futuro tratamiento y análisis de las producciones escritas de los estudiantes constituirán la base de una próxima investigación.

7 Referencias

1. Font, V.; Godino, J. D.; D'Amore, B.: Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 27, No. 2 (2007).
2. Duval, R.: Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 5, pp. 37-65 (1993).
3. Duval, R.: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt, F. (Ed): *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 5 (1998).
4. Duval, R.: Quel cognitive retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 6, No.3, pp. 349-382 (1996).
5. Duval, R.: *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Artes gráficas Univalle (1999).
6. Hiebert, J.; Carpenter, T.P.: Learning and teaching with understanding. Grouws (Ed.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Macmillan Publishing Company, pp. 65-97 (1992).
7. Janvier, C.: Representation and Understanding: The notion of function as an example. Janvier, C. (Ed.): Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates, pp. 67-71 (1987).
8. Kaput, J.: Notations and representations as Mediators of Constructive Processes. Von Glasersfeld, E. (Ed.): Radical Constructivism in Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers, pp. 53-74 (1991).
9. Acosta Gempeler, M.: La Teoría Antropológica de lo Didáctico y las Nuevas Tecnologías. *I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Sociedad Escuela y Matemáticas: Las aportaciones de la TAD*. http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Acosta.pdf. Accedido del 5 al 13 de Febrero de 2015.
10. Arcavi, A.; Hadas, N.: El computador como medio de aprendizaje: Ejemplo de un enfoque. *Seminario repensar las matemáticas*. https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2014/01/s71-material-de-referencia.pdf. (2003). Accedido del 3 al 11 de Marzo de 2015.
11. Artigue, M.: Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Portal de revistas académicas de la Universidad de Costa Rica*. http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6948/6634 (2007). Accedido del 2 al 10 de Marzo de 2015.
12. Santos, M.: On the implementation of mathematical problem solving: Qualities of some learning activities. Dubinsky, E. Schoenfeld, A.; Kaput, J. (Eds): *Research in collegiate mathematics education*. Vol. III. American Mathematical Society, pp. 71-80 (1998).

13. Santos Trigo, L.: La Educación Matemática, resolución de problemas y el empleo de herramientas computacionales. *Portal de revistas académicas de la Universidad de Costa Rica* revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6949/6635 (2007). Accedido del 8 al 16 de Marzo de 2015.
14. Villareal, M.: Transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación traen para la educación matemática. *Yupana, Revista de Educación. Matemática de la Universidad Nacional del Litoral*, Vol 1, pp. 41-55 (2004).
15. Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B.: *Cálculo Esencial*. Cengage Learning Editores, pp. 97-98. (2010).
16. Thomas Jr., G.: *Cálculo una variable*. Pearson Educación, pp. 172-176. (2006).
17. Molina González, M.: Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. Tesis Doctoral. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. Granada, España*. http://hera.ugr.es/tesisugr/16546167.pdf. Accedido durante los meses de marzo y abril de 2015.

Apéndice

El problema del clavadista

Un clavadista salta desde un trampolín que se encuentra a una altura de 32 pies sobre el agua (ver figura 1) con una velocidad inicial de 16 pies/seg.

Se pide responder:

a) ¿Cuál es el instante t en el que el clavadista choca con el agua?

b) ¿Cuál es la velocidad del clavadista en el momento del impacto?

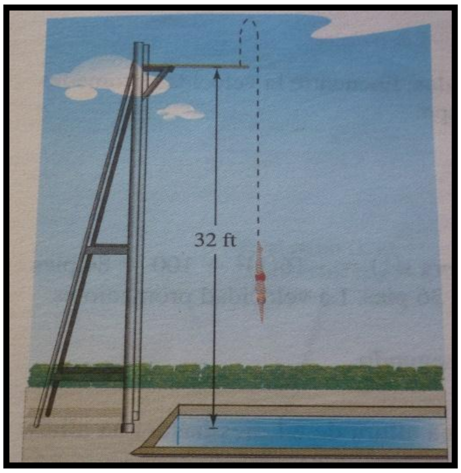

Fig. 1. El problema del clavadista.

El problema de la piedra

Una explosión de dinamita lanza desde el suelo una roca pesada directamente hacia arriba con una velocidad de 160 pies/seg. Luego de t segundos, la roca alcanza una altura de $s(t)=160t-16t^2$. (La trayectoria descripta por la piedra se considera incluida en un plano. Ver figura 2)

Se pide responder:

a) ¿Qué altura alcanza la roca?

b) ¿Cuál es la velocidad y la rapidez de la roca cuando está a 256 pies del suelo durante el ascenso? ¿Y durante el descenso?

c) ¿Cuál es la aceleración de la roca en cualquier tiempo t durante el vuelo (después de la explosión)?

d) ¿Cuándo choca la roca nuevamente contra el suelo?

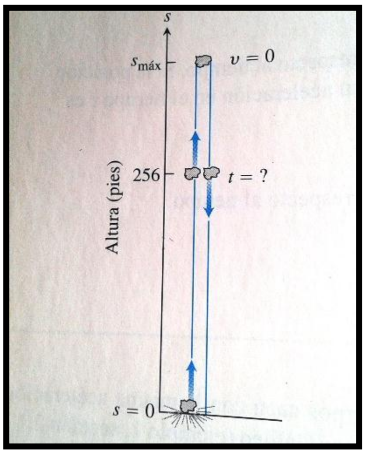

Fig. 2. El problema de la piedra.

Mario Garelik es argentino, Licenciado en Matemática Aplicada (egresado de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Litoral), Mágister en Didácticas Específicas (orientación Matemática, título obtenido en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral).

Categoría IV como investigador, otorgada por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU)

Actualmente se desempeña como Profesor Titular Ordinario en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral. Es Coordinador General del Área de Matemática de la mencionada institución. Responsable de la asignatura Cálculo I en las carreras de Ingeniería en Informática, Ingeniería Ambiental e Ingeniería en Recursos Hídricos, está también a cargo del dictado de clases teóricas en las asignaturas de Matemática Básica y también ha dictado clases en las asignaturas Cálculo II y Álgebra Lineal.

Autor del libro *Problemática de la comprensión del infinito en series numéricas.* ISBN: 978-3-659-04350-5. Agosto de 2012. Editorial Académica Española.

Dictó, en conjunto con la Licenciada en Matemática María Elina Díaz Lozano el curso de posgrado “Factorizaciones de matrices y aplicaciones”, que tuvo lugar en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (U.N.L.), correspondiente a la Maestría en Recursos Hídricos. También, el Seminario de capacitación y actualización en docencia para la enseñanza de Matemática, organizado por el Departamento Físico – Matemática de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas.

En la actualidad es director de una tesista de la Maestría en Didácticas Específicas, orientación Matemática, que se dicta en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral

Se desempeñó como jurado docente en diversos concursos ordinarios de la Universidad y es miembro de la Comisión de Seguimiento académico de la carrera Ingeniería en Recursos Hídricos de la facultad.

Se ha desempeñado como docente tutor o como director en diferentes becas y pasantías relacionadas con la enseñanza de Matemática en el Ciclo Básico de la Universidad y también con el diseño de estrategias y acciones destinadas a combatir el desgranamiento y deserción en la matrícula de alumnos del primer año de las distintas carreras de la universidad.

En la actualidad es miembro del Grupo Responsable del Proyecto de Investigación: “Aportes y limitaciones de las herramientas computacionales en las actividades cognitivas orientadas al aprendizaje de matemática en alumnos de 1° año”, enmarcado en un C.A.I.+D. 2011.

Ha sido autor de diversos trabajos y comunicaciones científicas presentados en congresos disciplinares, entre los que se pueden mencionar: *La Matemática en el nivel inicial de ingeniería: métodos alternativos de Enseñanza – Aprendizaje* (XII CONGRESO CHILENO DE EDUCACION EN INGENIERIA, 1998), *Una experiencia de enseñanza de Matemática a través de la web (CONGRESO INTERNACIONAL*

"EDUCACIÓN SUPERIOR Y NUEVAS TECNOLOGÍAS, 2005), *Plataformas informáticas para la enseñanza de Matemática* (V CAEDI - V CONGRESO ARGENTINO DE ENSEÑANZA DE LA INGENIERÍA, 2006), *El Material Didáctico De Un Curso De Matemática A Distancia: Percepciones De Los Alumnos* (EDUC@ 2008 PRIMER CONGRESO VIRTUAL IBEROAMERICANO DE CALIDAD EN EDUCACIÓN A DISTANCIA), etc.

Apellido y Nombre: Montenegro Fabiana
País: Argentina
Títulos Universitarios de Grado:
1992. Profesora en Matemática (Facultad de Formación Docente en Ciencias, Universidad Nacional del Litoral).
2000. Licenciada en Matemática Aplicada (Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral).
Título Universitario de Posgrado:
2006. Magíster en Matemática (Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral).
Categoría de investigador CONEAU: V
Obras y/o publicaciones editadas.
2011. Montenegro, F. y Nagel, M. (2011). Geometría y funciones con el entorno Geogebra en la Escuela Secundaria. Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral Ediciones. ISBN 978-987-657-661-1
2012. Coautora del ANEXO al libro 'Matemática para el ingreso' utilizado para el dictado de los Cursos del ingreso a la UNL. Ediciones UNL. Santa Fe.
2012. Geogebra en la escuela secundaria. Relato de experiencia de formación a distancia con profesores del nivel. Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática. Año 14. Número 55. ISSN 1668-2904.
Cargos en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe- Argentina)
Jefe de Trabajos Prácticos contratado e interino en las asignaturas 'Matemática Básica' y 'Algebra Lineal' desde mayo del 2005 a junio del 2008.
Jefe de Trabajos Prácticos ordinario en las asignaturas 'Matemática Básica' y 'Algebra Lineal' desde junio del 2008 a agosto del 2014
Profesor Adjunto interino desde agosto del 2014 hasta la actualidad.
Desde 2006 y en la actualidad ha participado tanto en Trabajos de Investigación en Educación Matemática como en la presentación de Conferencias Científicas y ponencias en congresos y seminarios.